УДК 339.13+338.2

Р.Р. Вазиев, Г.З. Муратова, Е.Н. Тарасова
Ижевский государственный технический университет, г. Ижевск, Российская Федерация
velyalin@mail.ru

Моделирование и оптимизация взаимодействия элементов в финансово-промышленной системе

В статье рассмотрена модель взаимодействия элементов в финансово-промышленной системе. Найдены численные решения управляющих воздействий, оптимизирующих целевые функции.

Экономические системы, как правило, состоят из нескольких объектов, имеющих свои собственные цели и обладающих определенной долей свободы для их достижения. Наличие нескольких целей в системе приводит к возникновению игровой ситуации, которая позволяет рассматривать задачу оптимального управления активной системой как задачу многокритериальной оптимизации. Многокритериальная оптимизация основана на отыскании решения, одновременно оптимизирующего более чем одну функцию. В этом случае ищется некоторый компромисс, в роли которого может выступать решение, оптимальное в смысле Парето. Если решение недоминируемо никаким другим решением, то оно называется оптимальным в смысле Парето.

Целью работы является оптимизация динамических процессов корпоративного взаимодействия предприятий и организаций в составе финансово-промышленной системы для выработки рекомендаций при принятии управленческих решений.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:
– разработка модели финансово-промышленной системы;
– определение целевых функций в системе;
– создание программного обеспечения для решения задачи оптимизации, основан ного на использовании генетического алгоритма;
– анализ результатов решений управляющих воздействий, полученных в некоторых частных случаях.

Модель финансово-промышленной системы

Система задается набором свойств объекта и введением переменных, соответствующих каждому свойству. Состояние системы описывается вектором переменных $x \in \Psi$. Каждое состояние зависит от наличия управляемых факторов $u \in U$ и неуправляемых факторов a. Функционирование системы определяется набором действий, правил и алгоритмов поведения участников. По совокупности правил состояние системы определяется некоторой зависимостью:

$$x = B(u, a). \tag{1}$$

Эффективность функционирования определяется критериями поведения участников, описываемыми целевыми функциями

$$Ф_j(x,u,a),\ \ j=1,...,m. \tag{2}$$

Рациональный выбор действий элементов максимизирует (минимизирует) целевые функции (2). Элементы системы могут иметь полную или частичную информацию о модели поведения других элементов.

Задачу (2) можно рассматривать как многокритериальную задачу оптимизации вида:

$$Ф_j(x,u,a)\to \min,\ \ j=1,...,m. \tag{3}$$

В качестве экономической системы рассмотрим модель корпоративного взаимодействия между участниками финансово-промышленной системы, представленную в [1]. В данной работе составлена модель, включающая одно предприятиепро-изводитель, одно предприятие-потребитель и банк-кредитор, оптимальное поведение участников которой получено аналитически. В состав модернизированной модели входят n предприятий A_1, …, A_n, производящих один и тот же вид продукции П, m предприятий $B_1,...,B_m$, потребляющих продукцию предприятий A_1, …, A_n и банк-кредитор $Б$ (рис. 1).

Будем считать, что для усовершенствования производства и увеличения выпуска продукции каждого i производителя используются банковские кредиты и реинвестированные средства только этого i предприятия-производителя. Также положим, что банк $Б$, владеющий частью акций предприятий $B_1,...,B_m$, заинтересован в совместной деятельности с предприятиями этой структуры.

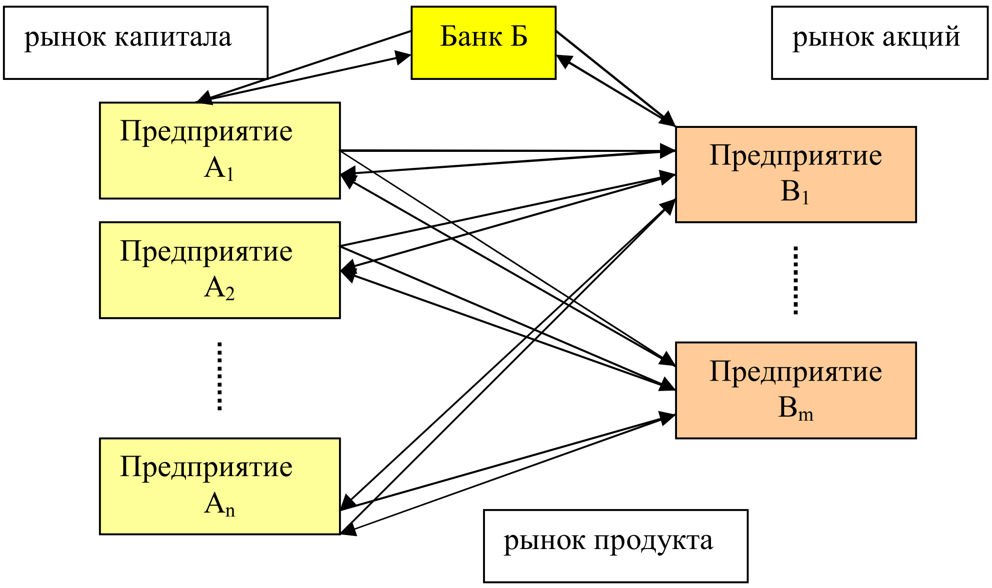


Рисунок 1 – Участники взаимодействуют в течение конечного непрерывного отрезка времени $[t_0,T]$

Пусть $y_i(t)$ – объем производимого предприятием A_i продукта П. Удельные затраты i-го предприятия составляют $c_i(y_i(t))$ и уже включают постоянные и переменные издержки.

Продукцию П каждое i-ое предприятие продаёт предприятию B_j по цене $p_i(t)$, причем рыночную цену обозначим p_0 и будем считать, что $c_i(y_i(t)) \le p_i(t) \le p_0$, кроме того, цена товара П для всех предприятий B_j одинакова.

Для усовершенствования производства или для увеличения выпуска продукции каждый i-ый производитель может отчислять от прибыли денежный ресурс в объеме $V_i(t)$ и воспользоваться кредитом банка Б под процент τ, который не больше, чем процент другого внешнего банка.

Банк Б имеет свободный ресурс $W(t)$, который может использовать на кредитование производителей A_i либо на приобретение акций предприятий B_j. Кроме того, банк Б на момент времени t_0 имел долю акций предприятия B_j в размере α_j^o.

Затраты на выпуск единицы продукции могут меняться при условии, что в момент времени t в производство вложили дополнительный финансовый ресурс $x_i(t)$, который складывается из финансовых средств i-го предприятия и банка. При этом рост капитальных затрат определяется функцией $\psi_i(x_i(t))$, а изменение переменных издержек – функцией $\varphi_i(x_i(t))$. И в качестве функции удельных затрат будем рассматривать функцию:

$$c_i(x_i(t), y_i(t)) = \varphi_i(x_i(t))[y_i(t)]^{\beta_i} + \psi_i(x_i(t))\frac{P_i}{y_i(t)+\Delta y_i}, \text{ где } \beta_i > 0 \text{ и } P_i > 0. \quad (4)$$

Банк в каждый момент времени t решает, куда направить свободный финансовый ресурс $W(t)$: на кредитование A_i на условиях τ в размере $K_i(t)$ или на приобретение доли $\omega_j(t)$ акций предприятия B_j (одного или нескольких) на сумму $\Omega_j(t)$, причем $W(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \Omega_j(t)$.

Внутреннюю цену от продажи единицы продукции i-ым производителем любому предприятию B_j зададим следующим образом:

$$p_i(t) = c_i(x_i(t), y_i(t)) + \xi_i[p_0 - c_i(x_i(t), y_i(t))], \quad 0 \le \xi_i \le 1. \quad (5)$$

Предприятие B_j покупает продукцию П у производителей в объеме $Y_j(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} y_i(t)$, где $\alpha_{ij} y_i(t)$ – количество продукта П, покупаемого j-ым потребителем у i-ого производителя. Причем, будем считать, что система замкнута, то есть выполнено равенство $\sum_{i=1}^{n} y_i(t) = \sum_{j=1}^{m} Y_j(t)$.

Доход каждого i-ого производителя в момент t состоит из выручки от продажи продукта П, с вычетом производственных издержек и расчетам по кредитам. Доход банка Б в момент времени t есть сумма процентов по кредитам предприятий A_i и отчислений от прибыли предприятий B_j, соответствующих доле, которой к данному моменту времени владеет банк. Доход предприятия B_j в момент времени t определяется объемом денежных средств, полученных от продажи продукции П, а также долей участия банка Б.

Тогда:

$$\pi_{Ai}(x_i(t),y_i(t))=[p_i(x_i(t),y_i(t))-c_i(x_i(t),y_i(t))]\cdot y_i(t)-(1+\tau)K_i(x_i(t),y_i(t)),\quad i=1,...,n$$

$$\pi_{Bj}(X(t),Y_j(t))=(1-q_j^0(t))\sum_{i=1}^{n}(p_0-p_i(x_i(t),y_i(t)))\cdot\alpha_{ij}y_i(t),\quad q_j^0(t)=\alpha_j^0+\omega_j(t),\quad j=1,...,m \qquad (6,7,8)$$

$$\pi_Б(X(t),Y(t))=\tau\sum_{i=1}^{n}K_i(x_i(t),y_i(t))+\sum_{j=1}^{m}q_j^0\pi_{Bj}(X(t),Y_j(t))$$

где $X(t)=(x_1(t),...,x_n(t))$, $Y(t)=(Y_1(t),...,Y_m(t))$

Пусть $J_{Ai}(T),J_{Bj}(T),J_Б(T)$ – интегральные дисконтированные накапливаемые доходы соответственно предприятий-производителей A_i, предприятий-потребителей B_j и банка Б на отрезке $[t_0,T]$. Тогда задачи для участников имеют вид:

$$J_{Ai}(T)=\int_{t_0}^{T}[\pi_{Ai}(x_i(t),y_i(t))-V_i(t)]e^{-\mu_{Ai}t}dt\to\max_{\substack{y_i(t)\in U\\ V_i(t)\in Z}},\ \text{где}\ i=1,...,n, \qquad (9)$$

$$J_Б(T)=\int_{t_0}^{T}\pi_Б(X(t),Y(t))e^{-\mu_Б t}dt\to\max_{K_i(t)\in K}, \qquad (10)$$

$$J_{Bj}(T)=\int_{t_0}^{T}\pi_{Bj}(X(t),Y_j(t))e^{-\mu_{Bj}t}dt\to\max_{\alpha_{ij}\in[0,1]},\ \text{где}\ j=1,...,m. \qquad (11)$$

Здесь $\mu_{Ai},\mu_{Bj},\mu_Б$ – коэффициенты дисконтирования, $y_i(t),V_i(t)$ – управления i-го производителя, $K(t)=(K_1(t),...,K_n(t))$ – управление банка, α_{ij} – управление j-го потребителя.

Динамика изменения системы описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений:

$\dot{x}_i(t)=K_i(t)+V_i(t),\quad x_i(t_0)=x_0$, $i=1,...,n$, где $X(t)\in\Delta, t\in[t_0,T]$, Δ – открытое ограниченное множество. Множества Z,K – компакты. Функции $K_i(t),V_i(t)$ – кусочно непрерывны. $x_i(t_0)=x_0$ – начальное условие фазовой траектории.

Траекторию $\langle X(t),Y(t),K(t),V(t)\rangle$, где $V(t)=(V_1(t),...,V_n(t))$, назовем равновесной, если задачи участников A_i, B_j и Б разрешимы, а интегральная прибыль каждого участника превышает аналогичную прибыль при их независимой друг от друга деятельности. В общем, решение данной задачи требует использования алгоритма решения задач многокритериальной оптимизации. Одним из подходов к решению многокритериальных оптимизационных задач является применение генетических алгоритмов.

Рассмотрим основные этапы применения генетического алгоритма для решения задачи многокритериальной оптимизации [2].

Пусть дана задача многокритериальной оптимизации

$$\Phi_j(X)\to\min,\ j=1,...,m. \qquad (12)$$

На первом шаге формируется популяция заданного размера q. Из этой популяции выбираются особи (решения X), являющиеся наилучшими по каждому критерию со значениями критериев $\Phi_j^0(X),\quad j=1,...,m$.

Особь, являющаяся лидером в данной популяции, определяется по правилу:

$$X^0 = \arg\left[\min_{i=1,\ldots,q}\left(\max_{j=1,\ldots,m} |\Phi_j^i(X) - \Phi_j^0(X)|\right)\right]. \quad (13)$$

Отбор для скрещивания производится турнирным методом. Полученное в результате реализации ряда итераций решение является однозначным и оптимальным по Парето. В качестве метода оптимизации применяется генетический алгоритм с вещественным кодированием, предложенный в работе [3].

Условие нахождения лучшей особи (12):

$$\Phi_i(X^0) - \Phi_i^0 = \Phi_j(X^0) - \Phi_j^0, \quad i, j = 1,\ldots,m,\ i \neq j. \quad (14)$$

На основании этого соотношения можно определить способ скаляризации векторного критерия. Вместо задачи векторной оптимизации (12) решается задача скалярной оптимизации:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m} \left[|\Phi_i(X^0) - \Phi_i^0| - |\Phi_j(X^0) - \Phi_j^0|\right]^2 \to \min, \quad (15)$$

где Φ_j^0 – минимальное значение критерия, полученное без учета других критериев.

Генетический алгоритм выполняет условие (15) в процессе решения исходной задачи.

При решении многих задач оптимального управления часто приходится иметь дело с несколькими критериями, измеряемыми в различных единицах. В этом случае целесообразно рассматривать безразмерные критерии. Генетический алгоритм и применение правила (13) позволяют решить задачу многокритериальной оптимизации с критериями различной природы без использования дополнительных оценок важности и сопоставимости критериев. Для сформированной популяции определяются минимальные и максимальные значения критериев $\Phi_j^{\min}(X), \Phi_j^{\max}(X),\ j = 1,\ldots,m$ и осуществляется переход к безразмерным критериям:

$$\overline{\Phi}_j(X) = \frac{\Phi_j(X) - \Phi_j^{\min}(X)}{\Phi_j^{\max}(X) - \Phi_j^{\min}(X)},\ j = 1,\ldots,m. \quad (16)$$

Далее применяется правило (13) для определения наилучшего решения. Величины $\Phi_j^{\min}(X), \Phi_j^{\max}(X),\ j = 1,\ldots,m$ являются экстремальными оценками по всем проведенным итерациям, то есть стремятся к соответствующим глобальным экстремумам по каждому критерию.

Результаты параметрических исследований

Рассматривается модельная корпоративная структура, состоящая из трех предприятий-производителей $А_1$, $А_2$, $А_3$ продукта П, двух предприятий-потребителей $В_1$, $В_2$ этого продукта и банка-кредитора Б.

Будем считать, что максимальный объем выпускаемой продукции равен 5 и функции, определяющие удельные затраты и сумму, на которую банк приобретает акции предприятий B_j, задаются следующими формулами:

$$\psi_i(x_i(t)) = a_{\psi i} \cdot e^{-b_{\psi i} x_i}$$

$$\varphi_i(x_i(t)) = a_{\varphi i} \cdot e^{-b_{\varphi i} x_i}$$

$$\Omega_j(t) = DelB_j \cdot \pi_{Bj}(X(t), Y_j(t)).$$

Также будем рассматривать небольшой отрезок времени, то есть коэффициенты дисконтирования примем равными 0. Пусть $\tau = 0.1$ – процентная ставка для производителей продукта П.

Вариант 1

Три предприятия A_1, A_2, A_3 и предприятия B_1, B_2 имеют одинаковые показатели, заданные в таблице 1,2.

Таблица 1 – Исходные данные (вариант 1)

Ai	$a_{\varphi i}$	$b_{\varphi i}$	β	$a_{\psi i}$	$b_{\psi i}$	P_i	Δy_i	ξ	p_0	X_0
1	0.5	0.01	0.5	1.0	0.01	1.0	0.1	0.5	2.0	0.1
2	0.5	0.01	0.5	1.0	0.01	1.0	0.1	0.5	2.0	0.1
3	0.5	0.01	0.5	1.0	0.01	1.0	0.1	0.5	2.0	0.1

Таблица 2 – Исходные данные (вариант 1)

Bj	α_j^0	Del B
1	0.1	0.1
2	0.1	0.1

Все элементы структуры имеют цели достигнуть максимума прибыли, то есть одновременно $\Phi_j(x,u,a) \to \max$, $j = 1,\dots,m$ ($m = 6$).

В результате решения задачи многоцелевой оптимизации получены управляющие воздействия, показанные на рис. 2 – 5.

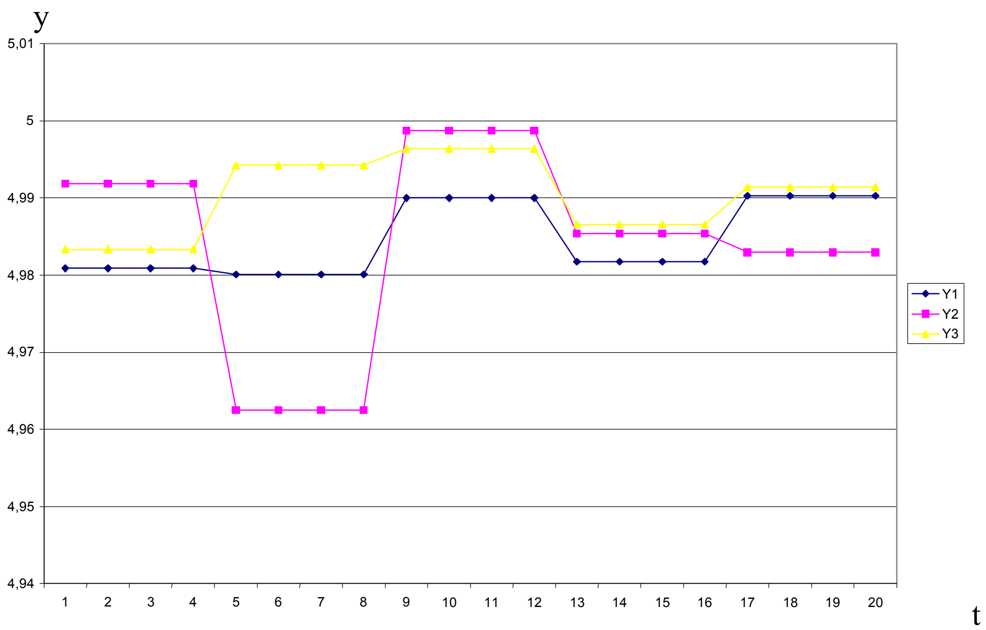


Рисунок 2 – Объем выпускаемой продукции предприятий A_i

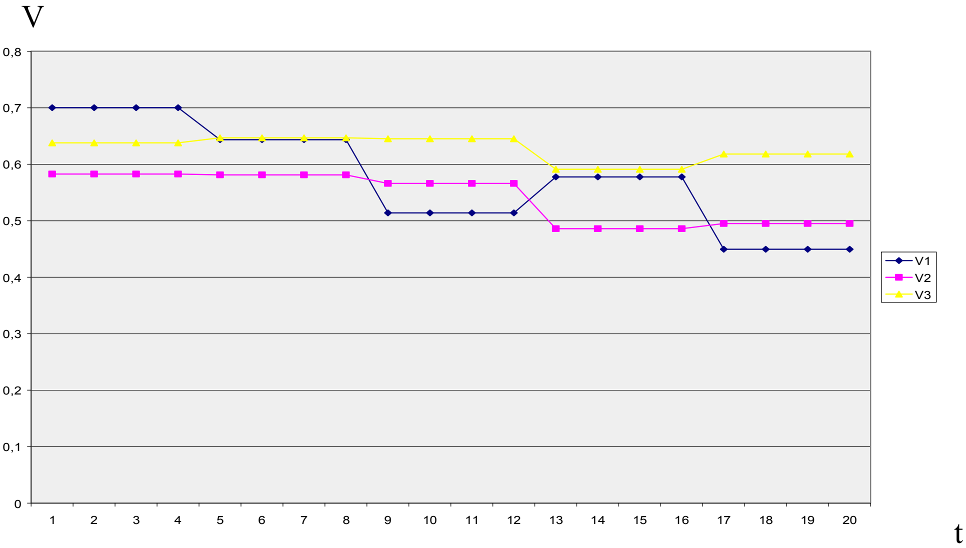


Рисунок 3 – Объем средств, вложенных в модернизацию производства предприятиями A_i

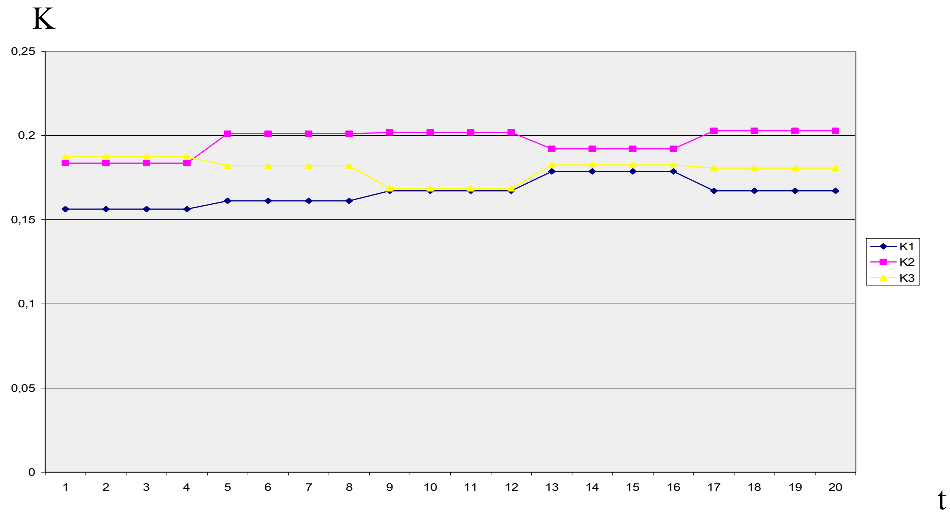


Рисунок 4 – Объёмы кредита банка предприятиям A_i

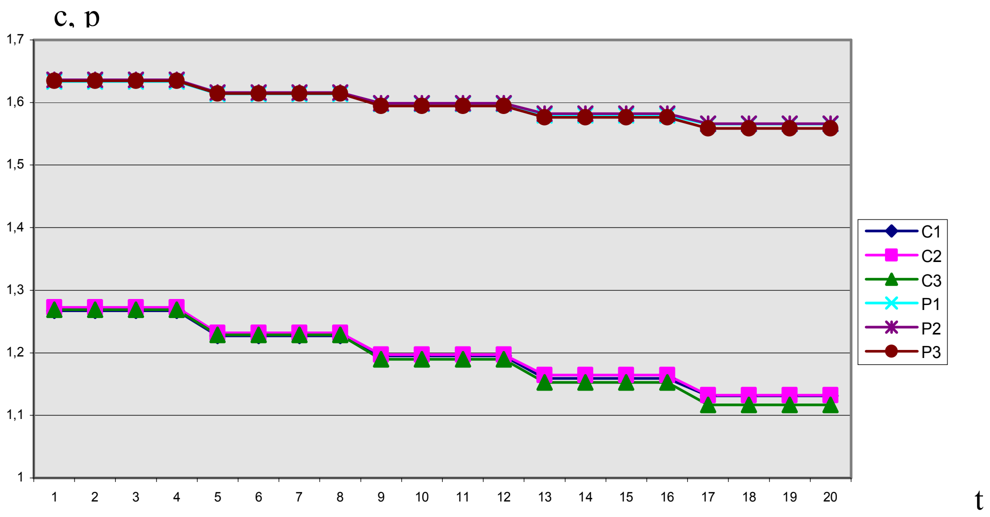
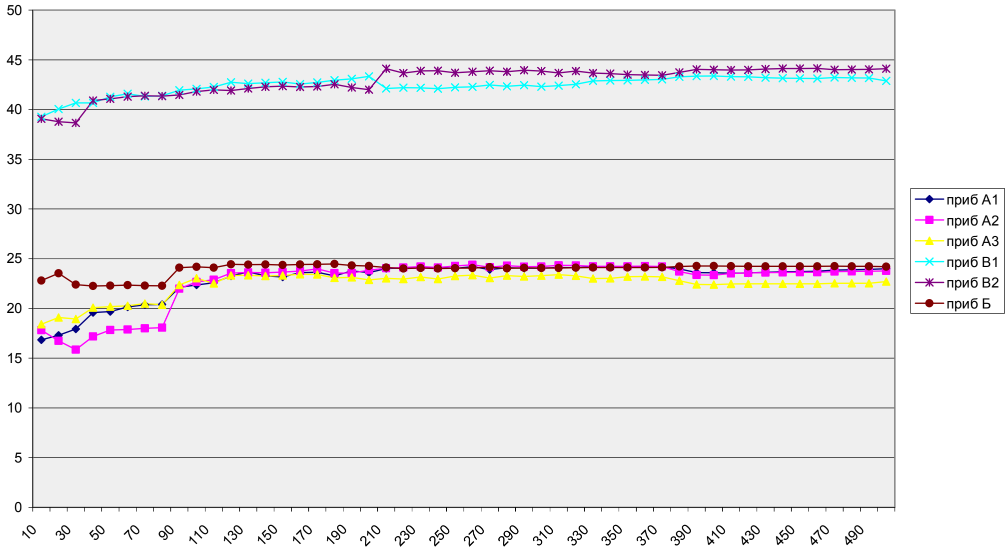


Рисунок 5 – Удельные затраты c_i и цена p_i, по которой производитель A_i продает свою продукцию

На рис. 6 показано установление в процессе проведения итераций интегральных накапливаемых доходов. Оптимизационная задача решена за 500 итераций, после чего критерии менялись несущественно.

J(T)



iter

Рисунок 6 – Изменение прибыли в процессе итераций

Полученные при численном решении интегральные накапливаемые доходы предприятий A_i отличаются не существенно ($J_{A1} = 23.994, J_{A2} = 23.768, J_{A3} = 22.700$). Доходы предприятий B_j значительно выше в силу того, что предприятия-потребители покупают весь объем производимой предприятиями A_i продукции П, а значит получают больший по сравнению с A_i, доход. Доходы B_1 и B_2 практически не отличаются ($J_{B1} = 42.874, J_{B2} = 44.111$). Доход банка – $J_Б = 24.194$.

Вариант 2

Три предприятия A_1, A_2, A_3 отличаются по себестоимости c_i и отпускной цене p_i продукции П.

Таблица 3 – Исходные данные (вариант 2)

Ai	$a_{\varphi i}$	$b_{\varphi i}$	β	$a_{\psi i}$	$b_{\psi i}$	P_i	Δy_i	ξ	p_0	X_0
1	0.4	0.005	0.5	1.0	0.01	1.0	0.1	0.45	2.0	0.1
2	0.4	0.005	0.5	1.0	0.01	1.0	0.1	0.5	2.0	0.1
3	0.5	0.01	0.5	1.0	0.01	1.0	0.1	0.5	2.0	0.1

Предприятия B_1, B_2 имеют одинаковые показатели:

Таблица 4 – Исходные данные (вариант 2)

Bj	α_j^0	Del B
1	0.1	0.1
2	0.1	0.1

В результате решения задачи многоцелевой оптимизации получены управляющие воздействия, показанные на рис. 7 – 10.

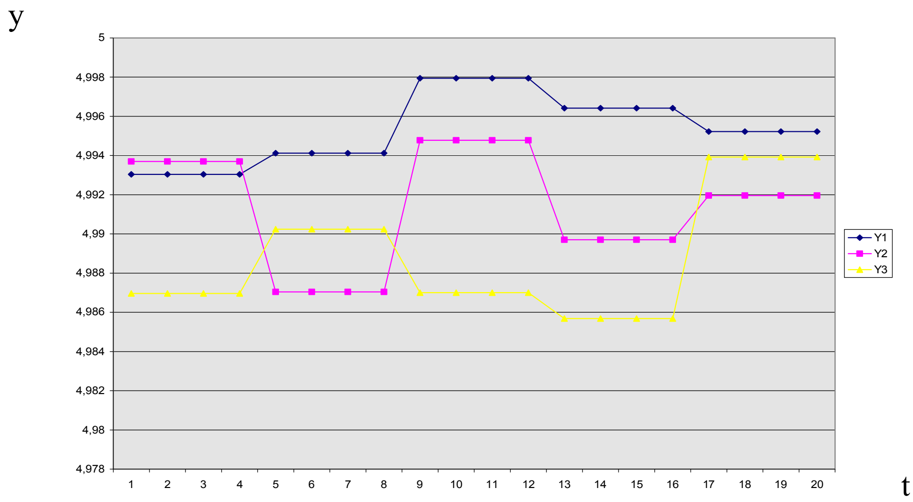


Рисунок 7 – Объем выпускаемой продукции предприятий A_i

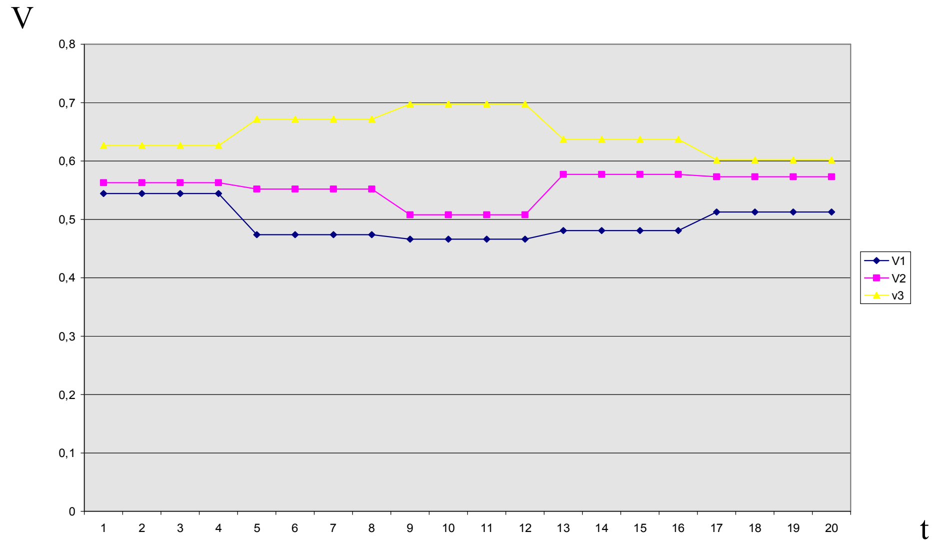


Рисунок 8 – Объем средств, вложенных в модернизацию производства предприятиями A_i

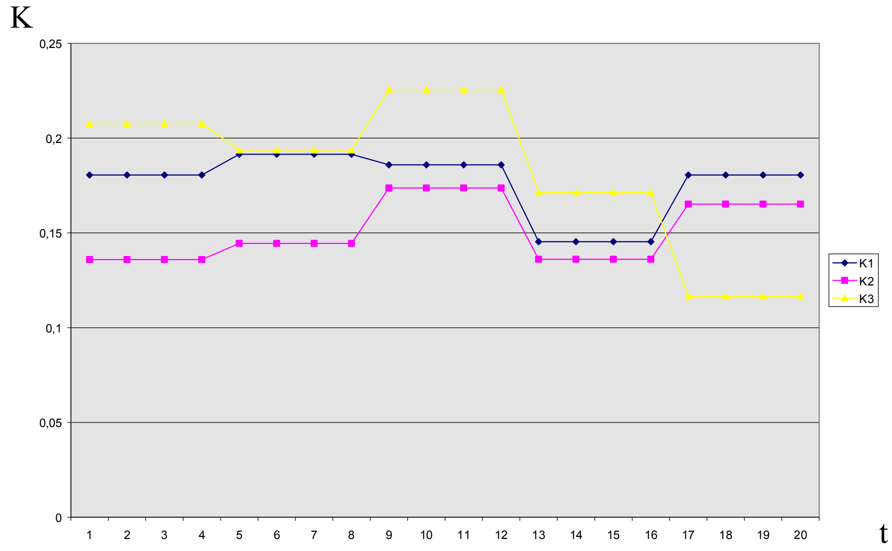


Рисунок 9 – Объёмы кредита банка предприятиям A_i

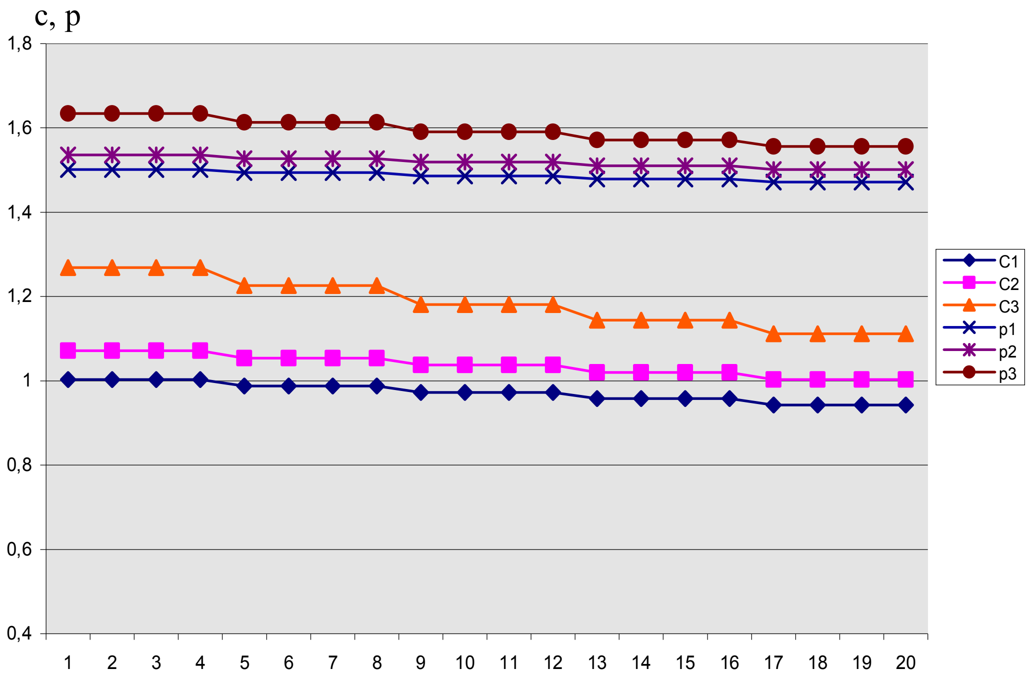


Рисунок 10 – Удельные затраты c_i и цена p_i, по которой производитель A_i продает свою продукцию

На рис. 11 показано установление в процессе проведения итераций интегральных накапливаемых доходов. Оптимизационная задача решена за 500 итераций.

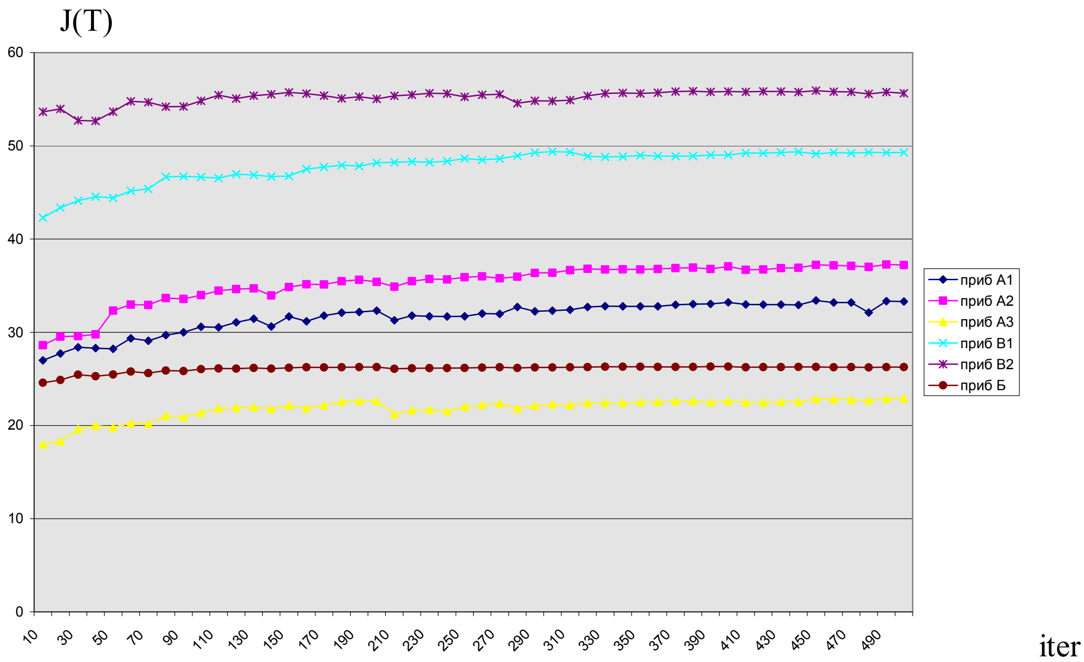


Рисунок 11 – Изменение прибыли в процессе итераций

Себестоимость продукции П, производимой предприятиями A_1 и A_2, одинакова, но поскольку внутренняя цена на продукт П предприятия A_1 меньше внутренней цены продукта П A_2, то интегральная прибыль первого предприятия A_1 ниже прибыли A_2 ($J_{A1} = 33.290, J_{A2} = 37.213$). Себестоимость продукции П третьего производителя

A_3 выше, поэтому при одинаковой внутренней цене с предприятием-производителем A_2 доход A_3 ниже ($J_{A3} = 22.895$). Доходы B_1 и B_2 $J_{B1} = 49.297$, $J_{B2} = 55.641$. Доход банка – $J_Б = 26.263$.

Сравнивая варианты, можно сказать, что во втором случае предприятия-производители, имеющие показатели, отличные от первого варианта, получают большую прибыль и в целом производят больше продукции, в результате чего в выигрыше остаются и предприятия-посредники в реализации продукции. Доход банка во втором варианте больше, хотя разница невелика.

Литература

1. Косачев Ю.В. Финансово-промышленные корпоративные структуры. Математические модели и методы исследования экономической эффективности. – М.: Электронное издание, гос. регистрация № 0320401753, Свидетельство № 5381 от 09.12.2004.
2. Тененев В.А. Решение задачи многокритериальной оптимизации генетическими алгоритмами. – Ижевск: Изд-во ИжГТУ. – 2006. – № 2. – С. 103-109.
3. Тененев В.А. Применение генетических алгоритмов с вещественным кроссовером для минимизации функций большой размерности. – Ижевск: Изд-во ИжГТУ. – 2006. – № 1. – С. 93-107.

Р.Р. Разієв, Г.З. Муратова, Є.Н. Тарасова

Моделювання й оптимізація взаємодії елементів у фінансово-промисловій системі

У статті розглянута модель взаємодії елементів у фінансово-промисловій системі. Знайдені числові розв’язки керувальних впливів, оптимізуючих цільові функції.

Статья поступила в редакцию 02.07.2008.